

## Ağların Hareketli Yol-Kesici Tarafından En Kısa Güzergâh Kullanılarak Kesilmesi

Ahmet Kabarcık<sup>1</sup> Levent Kandiller<sup>2</sup> Haluk Aygüneş<sup>3</sup>

### Öz

Bu makalede yolların hareketli yol-kesici tarafından devre dışı bırakıldığı bir ağ kesme problemi ele alınmıştır. İç içe geçmiş iki ağdan biri ağ-kullanıcı tarafından, diğeri ise yol-kesici tarafından kullanılmaktadır. Yol-kesici ağı üzerindeki düğümler ağ-kullanıcı ağındaki yolların ya da düğümlerin üzerinde konuşlanmıştır. Yol-kesici ağı üzerindeki düğümler imha edilmeye aday noktalar. Bu çalışmada ağ-kullanıcının başlangıç ve hedef düğümleri arasındaki tüm güzergâhlarını imha etmek için yol-kesicinin kullanacağı en kısa güzergâh bulunmaya çalışılmaktadır. Problemin çözümü için dal-sınır yöntemi kullanılarak bir algoritma geliştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ağ Kesme, En Kısa Güzergâh, Maksimum Akış, Minimum Kesme.

## Network Interdiction by Dynamic Interdictor Using Shortest Path

### Abstract

This paper considers a network interdiction problem in which arcs are disabled by a dynamic interdictor. One of the two interconnected networks is used by the network-user and the other one is used by the interdictor. An interdictor's node may either be deployed on an arc or on a node of the network user. Nodes on the interdictor's network are candidate points for destruction. In this study, it is aimed to find the shortest path that can be used by the interdictor while destroying all paths between origin and destination nodes of network user. An algorithm is developed to solve the problem by using branch and bound method.

**Keywords:** Maximum Flow / Minimum Cut, Network Interdiction, Shortest Path.

### Giriş

Ağ modelleri çok farklı alanların analizinde temel oluşturmaktadır. Grafların, tedarik zincirlerinin, ulusal altyapı tesislerinin, sosyal ilişki ve organizasyonların çalışılması ve analizinde kullanılır (Kennedy, 2009). Dolayısıyla ağ kesme problemleri de birçok uygulama alanında geniş çaplı çalışılmaktadır. Bu çalışmalar uyuşturucu madde kaçakçılığının

<sup>1</sup> Yazışma adresi: Uzman, Çankaya Üniversitesi, Müh.Mim.Fak., Endüstri Müh. Bölümü, Ankara, a.kabarcik@ankaya.edu.tr

<sup>2</sup> Prof.Dr., Çankaya Üniversitesi, Müh.Mim.Fak., Endüstri Müh. Bölümü, Ankara

<sup>3</sup> Yrd.Doç.Dr., Çankaya Üniversitesi, Müh.Mim.Fak., Endüstri Müh. Bölümü, Ankara

engellenmesi, hastanelerde enfeksiyon önleme ve askeri faaliyetler gibi bazı alanlarda uygulanmaya konulmuştur (Dai vd., 2002).

Literatürde ele alınan ağ kesme problemlerinde genellikle yol-kesicinin (YK) sabit, ağ-kullanıcının (AK) ise hareketli olduğu durumların ele alındığı gözlemlenmiştir. Yola sensör döşenmesi, hava sahasının radar yardımıyla kontrol edilmesi, kullanılması istenilmeyen yollara mayın döşenmesi ya da belirli noktalara karakollar kurulması gibi durumlarda YK statiktir. Statik yol-kesici (SYK) bulunduğu yolu kesme işlemini sürekli olarak icra eder. Eğer SYK konumunu değiştirirse yolun kesilme işlemi sona erer. Ayrıca birden fazla yolun kesilmesi gerekiyorsa birden fazla SYK'ya ihtiyaç vardır.

YK devre dışı bırakılan yol üzerinde sabit kal(a)mayabilir. Mesela uçak sortileriyle saldırılan bir ağda, uçağın imha edilen yol üzerinde sabit beklemesi düşünülemez. Uçak bir yolu devre dışı bıraktıktan sonra imha edebileceği diğer alternatif yollar arasında seçim yapmak ve ona göre güzergâhını belirlemek durumundadır. Bu durumda YK hareketlidir ve kendine ait bir ağa sahiptir. Hareketli yol-kesici (HYK) ağı, AK ağındaki yol ve düğümlere göre belirlenmektedir. Bu ağdaki düğümler AK ağı üzerinde kesilebilecek noktalardan oluşmaktadır. Bu düğümler arasında ulaşımı sağlayacak yollar ise HYK ağının yolları ve güzergâhlarını oluşturmaktadır.

AK'nın başarılı olması demek; başlangıç (b) ve hedef (h) düğümleri arasındaki yolculuğunu tamamlayabilmesi demektir. AK ağındaki b-h düğümleri arasındaki bir güzergâh üzerindeki bir yol ya da düğüm kesildikten sonra AK kesilen nokta ile h düğümü arasındaki bölümde kalıyorsa kesme işlemi anlamsızdır. Çünkü AK kesilen noktayı zaten geçmiştir. Bu nedenle kesilecek noktaya AK'nın ulaşmamış olması gerekmektedir. Bu çalışmada AK'nın her zaman en kısa güzergâhı (EKG) kullanacağı varsayılmaktadır. Dolayısıyla HYK'nın da AK'ya engel olmak için kesme işlemini en kısa sürede gerçekleştirecek bir güzergâh belirlemesi gerekecektir.

### **Literatür Araştırması**

Literatürde ele alınan bazı ağ kesme problemlerinde ağ üzerinde mücadele eden tarafların amaçlarının optimizasyonu çalışılmıştır. Bu amaçlar AK ağındaki akışın minimizasyonu veya EKG'nin maksimizasyonu ya da YK için kesme maliyetinin minimizasyonudur. Rocco vd. (2009), çalışmalarında ağdaki yolların kapasitelerinin ve kesilme maliyetlerinin

birbirinden farklı olabileceğini göz önüne alarak kesme işleminin nasıl olacağını incelemişlerdir. Israeli vd. (2002), ise çalışmalarında EKG'yi maksimize etme problemlerinin bilevel karmaşık tamsayı programlama olarak ele alındığı çalışmaları değerlendirmişlerdir. Wood (1993) ise maksimum akışın sınırlı bir kaynak ile minimize edilmesi problemini çalışmıştır. Ayrıca ağ kesme problemlerinde birden fazla amaç göz önüne alınarak kesme işlemi de yapılabilir. Buna Royset vd. (2007)'nin çalışmaları örnek olarak verilebilir. Royset vd. (2007) çalışmalarında maliyete ve ağdaki akışa göre bi-objektif deterministik ağ kesme problemlerinin analizini yapmışlardır. Çalışmada ağ kesme problemi belirlenen bir dizi amaca göre tek-amaçlı olarak ayrı ayrı çözülmüştür.

Ağ kesme problemi ile ilgili tüm bilgilerin deterministik olmadığı durumlarda literatürde çalışılan bir alan olmuştur. Bu duruma Cormican vd. (1998)'in çalışmaları örnek olarak verilebilir. Çalışmada yol kapasitesinin net bilinemediği durumlarda kapasite değerine olasılıklar verilmesi, kapasitenin belirlenen bir alt sınır ile üst sınır arasında olması gibi durumlar ele alınmıştır.

Washburn vd. (1995), çalışmalarında ağ kesme problemini oyun teorisi açısından incelemişlerdir. Çalışmada her oyuncu rakibine karşı uyguladığı stratejilerle kârını maksimize etmeye çalışır düşüncesi ile ağ kesme problemi Stackelberg oyun teorisi yapısına benzetilmiştir.

### **Problem Tanımı**

Ağ-kesme problemlerinin incelenmesinde birçok etmen göz önüne alınmaktadır. Ağ kesme problemlerinin daha kolay sınıflandırılabilmesi için bu çalışma kapsamında Tablo 1'de görülen taksonomi oluşturulmuştur.

#### **Problem taksonomisi**

Taksonomi için oluşturulan tabloda 19 adet etmen belirlenmiştir. İlk 9 etmen YK için, 10-16 arasındaki etmenler AK için, 17-19 arasındaki etmenler ise yolların durumu için tanımlanmıştır.

Tablo 1'de her bir etmen numarasının altında iki adet dikdörtgen kutu görülmektedir. İlk dikdörtgende etmenin ne olduğu tanımlanmaktadır. İkinci dikdörtgen ise etmenin alabileceği değerleri göstermektedir. Örneğin 1 numaralı etmenin altındaki ilk dikdörtgende bulunan "Tip" değişkeni 1. etmenin YK'nın tipini belirttiğini göstermektedir. Aynı etmenin altındaki ikinci dikdörtgende bulunan SYK ve HYK değerleri ise YK'nın tipinin

neler olabileceğini göstermektedir. İkinci sırada bulunan dikdörtgenlerdeki değerler kısaltmalar ile gösterilmektedir. Bu kısaltmaların açılımı tablonun altında belirtilmiştir. Ancak 4 ve 5 numaralı etmenler altlarındaki dikdörtgenler içerisinde görüldüğü gibi birden fazla değer içermektedir. Örneğin 4 numaralı etmenin altındaki ilk dikdörtgende “AK Kaynağının Durumu” değişkeni bulunmaktadır. Bu etmen YK’nın AK’nın kaynak düğümü ile ilgili neler bildiğini göstermektedir ve altındaki dikdörtgende de görüldüğü gibi iki adet bilgi içermektedir. 4 numaralı etmenin altındaki bu bilgiler iki sütun hâlinde oluşturulmuştur. İlk sütunda O, B, BY (Olasılıklı, Belirgin, Bilgi Yok) değerleri, ikinci sütunda ise T, Ç, BY (Tek Kaynaklı, Çok Kaynaklı, Bilgi Yok) değerleri bulunmaktadır. İlk sütun AK’nın kaynak düğümü ile ilgili eldeki bilgilerin ne kadar net olduğunu, ikinci sütun ise AK’nın kaç adet kaynak düğümü olduğunu göstermektedir.

Tablodaki 2 ve 10 numaralı etmenler sırasıyla YK ve AK’nın amaçlarıdır. Bu etmenlerin alabilecekleri değerlerin sadece kısaltmalar ile ifade edilmesi çok zordur. Bu kısaltmalar çalışma içerisinde ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

### Problem

Tablo 1’e göre problemleri tanımlarken sadece etmen numaraları ve bu numaraların altındaki ikinci dikdörtgen içerisindeki değerlerden biri kullanılır. Bu çalışma kapsamında incelenecek olan problemin özellikleri Şekil 1’de gösterilmektedir. Problemden dikkate alınmayan etmenlerin alacağı değer “-” ile belirtilmiştir. Örneğin 17 numaralı etmen dikkate alınmamıştır. Tablo 1’de 17 numaralı etmen yolların durumu için oluşturulan “Kapasite” etmenidir. Yani problemde yolların kapasitesi dikkate alınmaktadır.

|     |     |     |     |     |   |    |   |     |    |    |     |    |    |    |      |      |    |    |   |   |
|-----|-----|-----|-----|-----|---|----|---|-----|----|----|-----|----|----|----|------|------|----|----|---|---|
| 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6 | 7  | 8 | 9   | 10 | 11 | 12  | 13 | 14 | 15 | 16   | 17   | 18 | 19 |   |   |
| HYK | Y14 | TYK | B-T | B-T | B | -- | B | SRL | +  | A1 | TAK | TU | -- | -- | T(-) | S(-) | +  | -- | B | B |

Şekil 1. İncelenecek Problemin Tanımlanması

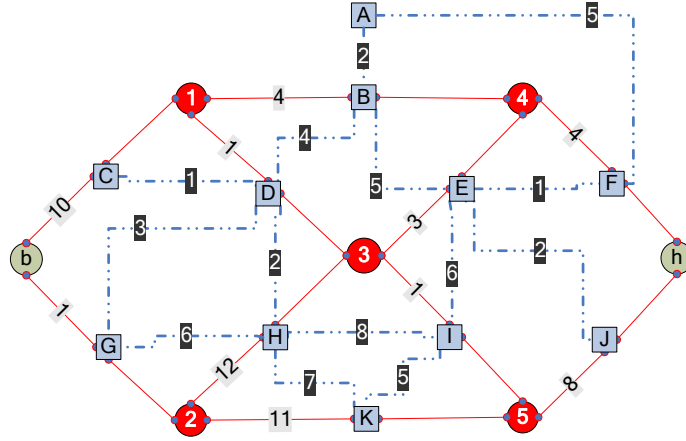
Tablo 1. Problem Tanımlama Çizelgesi

| YOL-KESİCİ (YK)              |                        |              |                        |                        | AG-KULLANICI (AK) |               |              |                     |                     | YOLLARIN DURUMU |              |              |               |                         |              |              |              |                    |
|------------------------------|------------------------|--------------|------------------------|------------------------|-------------------|---------------|--------------|---------------------|---------------------|-----------------|--------------|--------------|---------------|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| 1                            | 2                      | 3            | 4                      | 5                      | 6                 | 7             | 8            | 9                   | 10                  | 11              | 12           | 13           | 14            | 15                      | 16           | 17           | 18           | 19                 |
| Tip                          | Amaç                   | Çoklu Taktik | AK Kaynağının Durumu   | AK Deposunun Durumu    | AK'nın Amacı      | AK'nın Konumu | İmha         | Sıralı İmha         | Amaç                | Coklu Taktik    | Çok Ürün Tak | YK'nın Amacı | YK'nın Konumu | Tamir                   | Savunma      | Kapasite     | Usulükl      | Kesime Maliyetleri |
| SYK<br>HYK<br>Y1<br>Y2<br>Ym | O<br>T<br>C<br>B<br>BY | ÇYK<br>TYK   | O<br>T<br>C<br>B<br>BY | O<br>T<br>C<br>B<br>BY | O<br>B<br>BY      | O<br>B<br>BY  | O<br>B<br>BY | A1<br>A2<br>.<br>An | A1<br>A2<br>.<br>An | CAK<br>TAK      | CÜ<br>TÜ     | O<br>B<br>BY | O<br>B<br>BY  | T(-)<br>Tk<br>Tz<br>Tkz | S(-)<br>S(+) | O<br>B<br>BY | O<br>B<br>BY | O<br>B<br>BY       |

| Kısaltmalar: (Alfabetik sırayla)  |  |  |
|---|--|--|
| <p><b>AL<sub>1</sub>....An</b> : AK'nun sahip olabileceği amaçların herbiri.</p> <p><b>B</b> : Belirgin (kesin bilgiye sahip olunması).</p> <p><b>BY</b> : Bilgi Yok.</p> <p><b>Ç</b> : Çoklu (YK 4 numaralı etiminde AK'nun birden fazla kaynağı olduğu, 5 numaralı etiminde AK'nun birden fazla deposu olduğu bilgisine sahiptir anlamına gelmektedir.)</p> <p><b>ÇAK</b> : Çoklu Ağ-Kullanıcı (Ağ üzerinde birden fazla AK olması durumu)</p> <p><b>ÇÜ</b> : Çok Ürün (Örneğin bir düğümün bir taraftan gıda talep ederken başka tarafa silah arz etmesi durumu).</p> <p><b>ÇYK</b> : Çoklu Yol-Kesici (Birden fazla YK olması durumu)</p> | <p><b>HYK</b> : Hareketli Yol-Kesici</p> <p>O : Olasılıklı (kesin bilgiye sahip olunmaması)</p> <p><b>S(-)</b> : AK savunma yapamaz.</p> <p><b>S(+)</b> : AK savunma yapabilir.</p> <p><b>SRL</b> : YK'nun yolları bir öncelik sırasına göre kesmesi (Örneğin öncelikli olarak EKG üzerindeki bir yolun kesilmesi durumu)</p> <p><b>SRZ</b> : YK'nun yolları bir öncelik sırası olmadan kesmesi.</p> <p><b>SYK</b> : Sabit Yol-Kesici</p> <p><b>T</b> : Taktik (YK 4 numaralı etiminde AK'nun tek kaynağı olduğu, 5 numaralı etiminde AK'nun tek deposu olduğu bilgisine sahiptir anlamına gelmektedir.)</p> | <p><b>T(-)</b> : AK kesilen yolu tamir edemez.</p> <p><b>TAK</b> : Tek Ağ-Kullanıcı olması</p> <p><b>Tk</b> : AK kesilen yolu kaynak kısıtına bağlı olarak tamir edebilir.</p> <p><b>Tkz</b> : AK kesilen yolu kaynak ve zaman kısıtına bağlı olarak tamir edebilir.</p> <p><b>TÜ</b> : AK ağı üzerinde tek tip ürün sevkiyatı yapmaktadır.</p> <p><b>TYK</b> : Tek Yol-Kesici olması durumu.</p> <p><b>Tz</b> : AK kesilen yolu zaman kısıtına bağlı olarak tamir edebilir.</p> <p><b>Y1, ..., Ym</b> : YK'nun sahip olabileceği amaçların herbiri.</p> |

Ağ üzerinde AK ve HYK'nın kullanabileceği düğüm ve yollar farklı olabilir. Şekil 2'de AK ve HYK ağlarını tek bir ağda gösteren bir örnek görülmektedir. Kare düğümler HYK'nın, yuvarlak düğümler ise AK'nın kullanabileceği düğümlerdir. Kesikli çizgiler ile gösterilen yollar HYK'nın, düz çizgiler ile gösterilen yollar ise AK'nın kullanabileceği yollardır. Her bir yolun uzunluğu üzerinde gösterilmektedir.



Şekil 2. AK ve HYK'nın birleşik ağı

Şekil 2'deki örneğe göre, AK, başlangıç ( $b$ ) düğümünden yola çıkarak, düz çizgiler ile gösterilen ağ üzerinden, hedef ( $h$ ) düğümüne en kısa güzergâhı kullanarak gitmektedir. HYK, başlangıçta, merkez (A) düğümünde bulunmaktadır ve kesikli çizgiler ile gösterilen ağ üzerinden, imha edeceği noktalara (kare düğümlere) gitmektedir. Bu çalışmada HYK, AK'nın herhangi bir anda hangi konumda olduğunu bilmemektedir. HYK, AK'nın  $b$ - $h$  düğümleri arasındaki güzergâhları kendi ağı üzerinde en az yol katederek kesmeyi amaçlamaktadır.

Çalışmada ele alınan problem için aşağıda açıklanan matematiksel model oluşturulmuştur.

Parametreler:

$G = (V, A)$ : Ağ kullanıcının ağı

$H = (A \cup 0, E)$ : Yol kesicinin ağı

$K = (A \cup 0, J)$ : Yol kesicinin güzergâhlar ağı

$d_{ij}$  :  $H$  ağındaki  $i$  ve  $j$  düğümleri arasındaki en kısa güzergâhın uzunluğu

$GK$  :  $G$  ağındaki başlangıç ( $b$ ) ve hedef ( $h$ ) düğümleri arasındaki tüm güzergâhların kümesi

$g$  :  $G$  ağındaki  $b-h$  düğümleri arasındaki herhangi bir güzergâh

$\delta i$  :  $K$  ağı üzerindeki  $i$ . düğüme dokunan ayrıtlar kümesi

$P(g)$  :  $g$  güzergâhı üzerinde bulunan  $i$  düğümlerinin kümesi ( $i \in A$ )

$S$  :  $b-h$  arasındaki bütün bağları koparamayan ancak modelin çözümünde dalları keserek alt tur oluşturan güzergâhlar kümesi

#### Karar Değişkenleri:

$$x_e = \begin{cases} 1, & K \text{ üzerindeki } e \text{ bağlantısı } (i \text{ ile } j \text{ arasındaki } H \text{ üzerindeki } EKG_{ij}) \text{ seçilmişse} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$e = i, j$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } i \text{ düğümü seçilmişse} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

#### Formülasyon:

$$\text{Min} \sum_{e \in J} d_e x_e \quad (1)$$

Öyle ki;

$$\sum_{i \in P(g)} y_i \geq 1 \quad \forall g \in GK \quad (2)$$

$$y_0 = 1; \quad \sum_{e \in \delta(0)} x_e = 1 \quad (3)$$

$$x_e \leq y_i \quad x_e \leq y_j \quad \forall e = i, j \in J \quad (4)$$

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e \leq 2y_i \quad \forall i \in A \quad (5)$$

$$\sum_{e \in J} x_e \geq \sum_{i \in A} y_i - 1 \quad (6)$$

$$\sum_{\substack{e \in (i,j) \\ i \in S, j \notin S}} x_e \geq 1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_e &= 0 \text{ veya } 1 \quad \forall e \in J \\ y_i &= 0 \text{ veya } 1 \quad \forall i \in A \cup 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Amaç fonksiyonu (1) ağ kullanıcının  $b$  ile  $h$  arasında kullanabileceği tüm güzergâhları kesen yol kesicinin kendi ağı üzerinde katettiği en kısa güzergâhın uzunluğunu vermektedir.

(2) nolu kısıt kümesi ise, seçilen güzergâhlar sayesinde yol kesicinin ağ kullanıcının  $b$ 'den  $h$ 'ye olan tüm güzergâhlarını en az bir kez kesmesini garanti altına almaktadır.

(3) nolu kısıt yol kesicinin başlangıçta 0 nolu düğümde (Şekil 2'de A düğümünde) olduğunu ve bu düğümde hareket etmesi gerektiğini ve güzergâhların bitiş noktası olarak bu düğümde bulunmaması gerektiğini ifade etmektedir.

(4) nolu kısıt kümesi yol kesicinin  $H$  ağı üzerinde  $i$  ile  $j$  arasındaki güzergâhı katetmesi durumunda, bu güzergâhın başlangıç ve bitiş düğümlerini seçmesi gerektiğini ifade etmektedir. Ancak seçilen herhangi iki  $k$  ve  $l$  düğümleri arasında mutlaka bir güzergâh seçilmesi gerektiğini zorlamamaktadır. Ayrıca (5) gibi, (4) nolu kısıt kümesi bir düğümün seçilmemesi durumunda o düğümde başlayan veya sonlanan bir güzergâhın seçilemeyeceğini ifade etmektedir.

(5) nolu kısıt kümesi ise 0 nolu düğümün dışında bir düğümün güzergâhların sonlandığı bir düğüm olması durumunda yol kesicinin bir patika (en fazla tek giriş ve tek çıkış olmak üzere) güzergâhı halinde yürümesi için yazılmıştır.





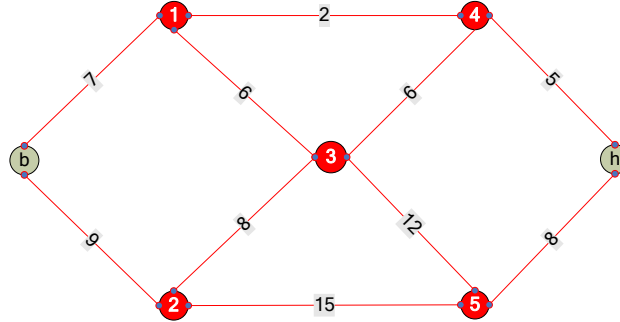
kullanılır. DÖA'nın özelliği öncelikle ağacın dallanmasının derinliğini tamamlamasıdır.

Dal-sınır algoritmasının daha çabuk sonuca ulaşması için optimal sonuç veremeyecek dalların budanması gerekir. Dalların optimal sonuç verip veremeyeceği ise üst sınır (ÜS) ve alt sınır (AS) değerleri belirlenerek anlaşılabilir.

### Çözüm için Üst Sınır

ÜS'nin belirlenmesinde maksimum akış / minimum kesme problemi göz önünde bulundurulmuştur. HYK'nın keseceği düğümlere ulaşmak için kendi ağı üzerinde hareket etmesi gerekir. Bu anlamda kesim değeri kesimde bulunan yolların uzunluğundan ziyade HYK'nın başlangıç düğümünden (A düğümü) bu yollara ulaşmak için katedeceği yol uzunluğu olarak değerlendirilmiştir. Bu durum Şekil 4'te, Şekil 2'de verilen örnek ağ için uygulanmıştır. Örneğin b ve 1 düğümleri arasındaki yolun uzunluğu 10 birimdir. Fakat HYK'nın A düğümünden bu yola ulaşım değeri 7 birimdir ve Şekil 4'te bu yol için 10 yerine 7 değeri alınmıştır.

Şekil 4'te verilen ağ için hesaplanacak olan maksimum akış/minimum kesme değeri Şekil 2'deki HYK için ÜS olacaktır. ÜS değerinden daha büyük bir değer ile ulaşılan düğümün olduğu dal doğrudan budanacaktır.



Şekil 4. AK Yolları ile HYK'nın A Düğümü Arasındaki Uzaklıklar

### Çözüm için Alt Sınır ve Dallanma

Problemin tanımında AK'nın EKG'yi kullandığı varsayılmıştı. EKG'nin kullanılmaması için EKG'yi oluşturan yollar ya da düğümlerden birinin kesilmesi gerekir. Dal-sınır yönteminin dallanan ağaç yapısı üzerinde

HYK'nın EKG üzerindeki her bir düğümüne ulaşmak için başlangıç düğümünden itibaren katettiği yolun uzunluğu her bir düğümün AS değeri olarak kabul edilecektir. AS değeri ÜS değerinden büyük olan düğümün dalı budanacaktır. Eğer HYK bir düğümüne ulaştığında tüm b-h güzergâhları kesiliyorsa o düğümün olduğu dal yine budanacaktır ve bu düğümün AS değeri ÜS değerinden küçük ise ÜS değeri olarak bu düğümün AS değeri atanacaktır. En küçük AS değerli düğümden dallanmaya devam edilecektir. Başlangıç düğümü ile dallanan düğüm arasındaki düğümlerin üzerinde bulunduğu AK yollarının kesilmiş olduğu farz edilerek ağdaki yeni EKG bulunacaktır. Yeni EKG üzerindeki HYK düğümlerinin AS değerleri bulunur ve ağaç bu şekilde dallanmaya devam eder. Dallanamayan bir düğümüne gelindiğinde bir üst seviyeye çıkılır ve bu seviyedeki yeni en küçük AS değerli düğümden dallanmaya devam edilir. Böylece ağacın dallanması AS değerine göre yapılmış olmaktadır.

#### Problemin çözüm algoritması

Problemin çözümü için şu ana kadar anlatılanlar doğrultusunda aşağıdaki algoritma oluşturulmuştur.

$\bar{U}S$  : Üst sınır,

$n$  : Yol-kesenin ağında bulunan düğüm sayısı,

$i$  :  $\{1, \dots, n-1\}$

$j$  : Dallanan düğüm,

$s$  : Dallanan düğümden gidilen düğüm,

$AS(i)$  : HYK'nın  $i$ . düğümüne ait alt sınır değeri,

$L_s^j$  :  $j$  düğümünden  $s$  düğümüne ulaşmak için katedilen EKG'nin uzunluğu,

$k$  : seviyeyi gösteren indeks.

Adım 1: Başlangıç

1.1  $k = 0, AS(0) = 0, AS(i) = \infty$ .

1.2 HYK'nın başlangıç düğümü ile AK ağı üzerindeki her bir yolun EKG'sini hesapla ve hesaplanan değerleri yolların uzunluk değeri olarak ata.

1.3 Maksimum Akış / Minimum Kesme problemini kullanarak  $\bar{U}S$ 'yi belirle.

Adım 2: Başlangıç ve hedef arasındaki bağı kesecek düğümlerin belirlenmesi

2.1 AK ağında b-h düğümleri arasındaki EKG'yi bul. (YK'nın başlangıç düğümünden dallanacak düğüme gelinceye kadar üzerinden geçtiği AK ağındaki yollar ve düğümler EKG'de olmamalıdır).

2.2 EKG varsa,

- i. EKG üzerindeki HYK düğümlerini belirle.
- ii.  $k = k + 1$  olarak ata.
- iii. Adım 3'e git.

2.3 EKG yoksa,

- i. Eğer  $\dot{U}S > AS(j)$  ise,  $\dot{U}S = AS(j)$  olarak ata. Adım 4'e git.

Adım 3: AS ve  $\dot{U}S$ 'nin belirlenmesi ve dallanma

3.1 i. Eğer  $AS(s) > (AS(j) + L_s^j)$  ise,  $AS(s) = (AS(j) + L_s^j)$  olur.

- ii. Eğer  $AS(s) > \dot{U}S$  ise,  $s$ . düğümün olduğu dalı buda. Adım 4'e git.

3.2  $k$  seviyesindeki en küçük AS değerli düğümü dallanacak düğüm olarak seç. Adım 2'ye dön.

Adım 4: Geri izleme

4.1  $k$  seviyesinde dallanmayan düğüm varsa, en küçük AS değerli düğümü dallanacak düğüm olarak seç. Adım 2'ye git.

4.2  $k$  seviyesindeki tüm düğümler dallandıysa;

- i.  $k = k - 1$  'e eşitle.
- ii.  $k=0$  ve tüm düğümler için  $AS(i) \neq \infty$  ise Adım 5'e git. Diğer durumlarda Adım 4.1'e dön.

Adım 5: Sonlandırma

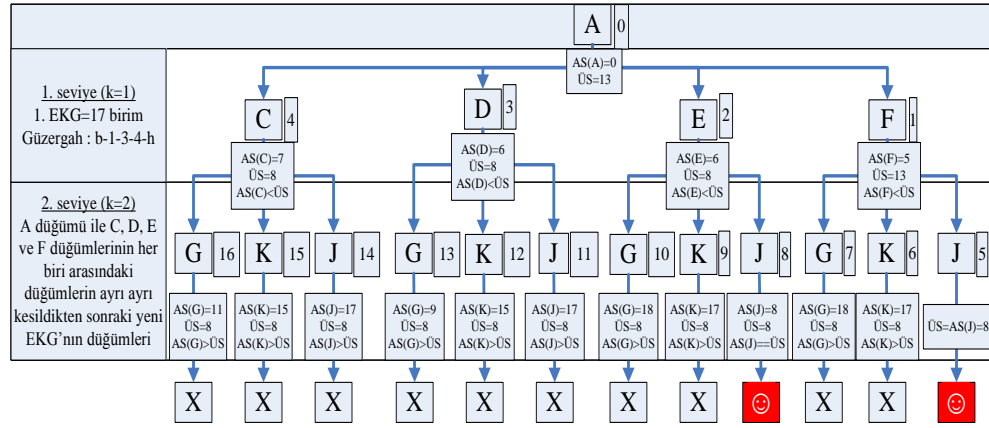
5.1 Ağacın en son  $\dot{U}S$  değerini oluşturan dalı optimal değeri veren güzergâhı içermektedir.

### Çözümün Uygulanması

Şekil 2'de verilen örnek ağ için yukarıdaki algoritmanın uygulaması Şekil 5'te görülmektedir. Dikdörtgen ile gösterilen HYK düğümlerinin sağ tarafındaki sayılar her bir düğümün işleme girme sırasını göstermektedir.

Ayrıca her düğümdeki AS, ÜS değerleri düğümlerin altındaki kutularda gösterilmektedir.

Şekil 2'deki AK ağı üzerindeki EKG (b-1-3-4-h) olarak belirlenmiştir. HYK'nın bu güzergâh üzerinde C, D, E, F düğümleri bulunmaktadır. HYK'nın A düğümünden bu düğümlere ulaştığı EKG uzunlukları bu düğümlerin AS değerleri olarak atanmıştır. Şekil 4'teki ağa göre maksimum akış / minimum kesme problemi yardımıyla ÜS'nin ilk değeri 13 olarak bulunmuştur. AS(F)'nin en küçük olması nedeniyle F düğümü dallanmıştır. F düğümünün bulunduğu (4,h) yolu ağdan çıkarılmış ve yeni EKG (b-2-5-h) olarak bulunmuştur. HYK'nın bu güzergâh üzerinde G, K, J düğümleri bulunmaktadır.



Şekil 5. Örnek Problem için Çözüm Yönteminin Uygulanması

HYK'nın A'dan başlayarak F üzerinden bu düğümlere ulaştığı EKG uzunlukları bu düğümler için AS değeri olarak atanmıştır. Gidilen düğümler arasında AS(J) en küçük değerli olan düğümdür. J düğümüne gelindiğinde kesilecek başka güzergâh kalmamıştır. F-J arasındaki EKG F-E-J'dir. A-F-E-J 8 birimdir. Dolayısıyla AS(J)=8'dir. AS(J)<ÜS olması nedeniyle ÜS=8 olarak değiştirilir. İlk çözümün değeri 8'dir ve A-F-E-J güzergâhı üzerindedir. F'den bir sonraki dallanma K'ya olacaktır ve AS(K)=17'dir. AS(K)>ÜS'dir. Dolayısıyla K düğümünün bulunduğu bu dal budanacaktır. Algoritma bu mantık çerçevesinde uygulanmaya devam edilir.

Şekil 5'te görüldüğü gibi algoritma Şekil 2'de görülen enumerasyon yöntemine göre oldukça az hesaplama yaparak sonuca ulaşabilmektedir.

### Sonuç

Birçok alanda uygulanması mümkün olan ağ-kesme problemlerinde karar verici için düğümler ve düğümleri birbirine bağlayan yollar bu faaliyetlerin oluşturulmasında göz önünde tutulacak temel bileşenlerdir. YK için önemli ayrımların başında YK'nın hareketli ya da statik olması gelmektedir. Her iki YK'nın yapıları itibarıyla uygulamada önemli farklılıkları bulunmaktadır. YK'nın hareketli olması bir YK ile birden fazla yolu kesme avantajı getirmektedir. Ancak YK kestiği yoldan ayrılmak durumunda olması nedeniyle yolun sürekli kesilmesini sağlayamamaktadır.

Taktik geliştirme, ikmal ve lojistik planlaması için ağların doğru analiz edilmesi gerekir. Bunun için ağın zayıf noktaları belirlenmelidir. Ağ analizinde YK, AK ve ağın durumunun incelenmesi ağ kesme işlemlerinin temelini oluşturmaktadır.

### Kaynakça

- Cormican, K.J., Morton, D.P. ve Wood, R.K. (1998). Stochastic Network Interdiction, *Operations Research*, 46(2).
- Dai, Y. ve Poh, K. (2002). *Solving the Network Interdiction Problem with Genetic Algorithms. Proceedings of the Fourth Asia-Pacific Conference on Industrial Engineering and Management System*, Taipei, December, 18-20.
- Israeli, E. ve Wood, R.K. (2002). Shortest-Path Network Interdiction, *Networks*, 40(2), 97-111.
- Kennedy, K.T. (2009). *Synthesis, Interdiction, and Protection of Layered Networks*. (Degree of Doctor of Philosophy, Air Force Institute of Technology)
- Rocco S.C.M. ve Ramirez-Marquez, J.E. (2009). Stochastic Network Interdiction Optimization Via Capacitated Reliability Modeling and Probabilistic Solution Discovery. *Elsevier Reliability Engineering and System Safety*, 94, 913-921.
- Royset, J.O. ve Wood, R.K. (2007). Solving the Bi-Objective Maximum-Flow Network Interdiction Problem, *Informatics*, 19(2), 175-184.

- 
- Washburn, A. ve Wood, K. (1995). Two Person Zero-Sum Games For Network Interdiction, *Operations Research*, 43(2), 243-251.
- Wood, R.K. (1993). Deterministic Network Interdiction, *Mathematical and Computer Modeling*, 17(2), 1-18.