İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 04 No 03 Sayfa 1-8 Aralık 2005

MARJİNAL ANALİZ YOLUYLA GÜVENİLİRLİK OPTİMİZASYONU

Ümit YÜCEER*

ÖZET

Marjinal analizin güvenilirlik redandansı optimizasyonuna bir uyarlaması anlatılmaktadır. Amaç fonksiyonu ayrışık hale dönüştürülüp, konkav olduğu gösterilecek ve marjinal analiz metodunun çok seri ve hızlı bir şekilde, optimal olmasa bile, optimala çok yakın çözümler türettiği bir örnekle gösterilecektir.

Anahtar Kelimeler : *Ayrık Konkav, Kaynak Tahsisi Problemleri, Marjinal Tahsis Algoritması.*

1. GİRİŞ

Çözülmek istenen problem, matematiksel olarak aşağıda görüldüğü gibi ifade edilebilir.

$$\max\ R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j^{x_j+1}) \qquad (1)$$

kısıtlar

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \text{ tamsayı, her bir } j=1,2,\ldots,n$$

Amaç fonksiyonu (1), sistemin güvenilirliğini gösterir ve $p_j = 1 - q_j$ teriminde her bir $j=1,2,\ldots,n$ elemanının güvenilirlik olasılığıdır. Özellikle Pages ve Gondran (1986) bu çeşit güvenilirlik optimizasyonu problemlerini tartışmaktadırlar. Daha genel anlamda, kaynak tahsisi problemleri Ibaraki ve Katoh (1988) tarafından tanıtılmıştır. Kaynak tahsisi problemlerinin daha genel bir sınıflandırması ve uygun çözüm teknikleri, Katoh ve Ibaraki (1998) tarafından yapılmıştır. Değişkenlerin sayısının az olduğu bir problem, bütün geçerli kombinasyonları deneyerek çözülebilir. Fakat bu metot, orta veya daha büyük sayıda değişkenleri olan problemlere uygulanamaz. Eğer bütün p_j'ler yeterince büyük (1'e yakın)

* Doç. Dr. Çankaya Üniversitesi, Mimarlık Mühendislik Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Ankara, TÜRKİYE

olmaları durumunda, $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu (1) yaklaşık olarak (Pages ve Gondran (1986)) şöyle ifade edilebilir: $R \approx 1 - \sum_{j=1}^{n} q_j^{x_j+1}$. Daha iyi bir sonuç, amaç fonksiyonu (1)'in logaritmasını alarak elde edilebilir.

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \log(1 - q_j^{x_j+1}) \qquad (3)$$

Kolaylık olması için, $f_j(x_j) = \log(1 - q_j^{x_j+1})$ tanımlayalım. Böylece amaç fonksiyonu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ ayrışık bir şekilde ifade edilmiş olur. Bir fonksiyonun, ayrışık olma özelliği, çok güçlü bir özelliktir (Yüceer (2002)).

2. AYRIK KONVEKSLİK KAVRAMI

D herhangi ayrık bir küme olsun. Verilen bir noktanın (Z) komşuluğu $\{W \in D : \|W - Z\| < 1\}$ olarak tanımlanır. Bu tanımda Z noktasının D içinde olması aranmaz. Eğer $Z \in D$ ise $N(Z) = \{Z\}$ olur.

Tanım 1 Herhangi bir ayrık küme D üzerine tanımlanmış bir fonksiyon $\Phi(X)$, eğer bütün X,Y $\in$ D ve $\alpha \in (0,1)$ için aşağıdaki şartı (4) sağlıyorsa, $\Phi(X)$ ayrık konveks bir fonksiyondur.

$$\alpha\Phi(X) + (1-\alpha)\Phi(Y) \geq \min_{W \in N(Z)} \Phi(W) \qquad (4)$$

Bu tanım, önemli bir özelliği simgeler ve yerel minimum, ayrık konvekslik kavramı altında global minimumdur (Miller (1971)). Daha genel kavramlar ve kuramsal gelişmeler Murota (2003) tarafından sunulmuştur. Ayrık D kümesini, genelliği bozmadan, n-boyutlu tam sayılar kümesi olarak alabiliriz.

Tanım 2 Eğer $-\Phi(X)$ bütün X $\in$ D için ayrık konveks bir fonksiyonsa, $\Phi(X)$ ayrık konkav bir fonksiyondur.

Tek değişkenli bir ayrık fonksiyonun ($\Phi(X)$), birinci ileri farkları şöyle gösterilebilir: $\Delta\Phi(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ ve ikinci ileri farklarıda $\Delta^2\Phi(x) = \Delta\Phi(x+1) - \Delta\Phi(x)$ olarak gösterilebilir.

Ayrık bir küme üstüne tanımlanmış bir fonksiyon için, klasik konvekslik tanımı birinci ileri farkların azalmayan (artan) bir dizi olması anlamına gelir. Başka bir deyişle, bu ikinci ileri farkların sıfır veya pozitif olması demektir. Bu sonuç, sürekli ve tek değişkenli bir fonksiyonun ikinci türevinin pozitif olmasıyla analog bir benzeyiştir. Klasik tanımının, ayrık konvekslik tanımıyla eşdeğerliliği Yüceer (2006) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 1 Amaç fonksiyonu (3) her bir *j=1,2,...,n* için terimi $f_j(x_j)$ ayrık konkavdır veya $-f_j(x_j)$ ayrık konvekstir.

İspat: Amaç fonksiyonu (3), ayrışık bir fonksiyon olduğu için, her bir j=1, 2,... , n için $f_j(x_j)$ fonksiyonun ayrık konkav veya $-f_j(x_j)$ ayrık konveks olduğunu göstermek yeterlidir. Bu sebeble, $f_j(x_j)$ fonksiyonunun birinci ileri farklarının monotonik azalan (artmayan) bir dizi oluşturduğunu veya ikinci ileri farklarının negatif veya sıfır olduğunu göstermemiz gerekir.

$$
\begin{aligned}
\Delta f_j(x_j) &= f_j(x_j+1) - f_j(x_j) \\
&= \log(1-q_j^{x_j+2}) - \log(1-q_j^{x_j+1}) \\
&= \log\left(\frac{1-q_j^{x_j+2}}{1-q_j^{x_j+1}}\right) \\
\Delta^2 f_j(x_j) &= \Delta f\,(x_j+1) - \Delta f_j(x_j) \\
&= \left(\frac{(1-q_j^{x_j+1})(1-q_j^{x_j+3})}{(1-q_j^{x_j+2})^2}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Öbür taraftan, bütün $0 \le q \le 1$ değerleri için $(1-q)^2 = 1-2q+q^2 \ge 0$ ve $1+q^2 \ge 2q$ sağlanır. Bu ilişkiyi kullanarak, yukarıda (5)'in paydasının $1-q_j^{x_j+1} - q_j^{x_j+3} + q_j^{2x_j+4}$, daima $1-2q_j^{x_j+2} + q_j^{2x_j+4}$ teriminden küçük veya eşit olduğu söylenebilir. Argümanın birden küçük veya eşit olması ise logaritmanın negatif veya sıfır olmasını gerektirir. Sonuç olarak, amaç fonksiyonunun konkav olduğunu söyleyebiliriz. Argümanımızı, bir adım daha ileri götürerek, aşağıda tanımlanan Lagrangian fonksiyonunun da ayrık konkav olduğunu gösterebiliriz.

Tanım 3 Her bir *i=1,2, ...,m* için, $\lambda_i \ge 0$ olsun.

$$
\Im(x_1, x_2, \ldots, x_n \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^{n} \log(1-q_j^{x_j+1}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \tag{6}
$$

Lagrangian fonksiyonu da ayrışık bir fonksiyondur. Aşağıdaki tanım bu konuda çok yararlı olacaktır.

Tanım 4

$$\Im_j(x_j,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=\log(1-q_j^{x_j+1})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}x_j \qquad (7)$$

Böylece $\Im(x_1,x_2,\ldots x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=\sum_{j=1}^{n}\Im_j(x_j,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i$

Teorem 2 $\Im(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ ayrık konkav bir fonksiyondur.

İspat: Her bir *j=1,2,...,n* için $\Delta^2\Im_j(x_j,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=\Delta^2 f_j(x_j)\le 0$ olduğu açıkça görülebilir. Sonuç olarak, Lagrangian fonksiyonuda ayrık konkavdır.

Lagrangian fonksiyonunun konkav olması, marginal analiz algoritmasının uygulanabilmesine müsaade eder. (Fox (1966), Kao (1976) veya Yüceer (1999)).

3. TEK KISITLI KAYNAK TAHSİSİ PROBLEMİ

Verilen bir bütçe seviyesini aşmadan, güvenilirliği maksimum kılacak şekilde bütün elemanların sayısını (x_j) bulmamız gerekiyor. Bu durumda kısıtlar yeniden şu şekilde ifade edilecektir.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \qquad (8)$$

Görüldüğü üzere bu küçük problemin bir tek kısıtı vardır ve bu problem için marjinal analiz algoritması aşağıdaki gibi tarif edilebilir.

Başlangıç: Her j=1,2,...,n için $x_j=0$.

Adım 1. Her j=1,2,...,n için aşağıdaki oranı hesapla.

$$r_j=\frac{\log\left(\dfrac{1-q_j^{x_j+2}}{1-q_j^{x_j+1}}\right)}{a_j}$$

Adım 2. $\max_{1\le j\le n}\{r_j\}=r_{j^*}$. *Eğer* $\sum a_j x_j + a_{j^*}\le b$, $x_{j^*}=x_{j^*}+1$ *ve Adım 1'e geri dön.*

Aksi takdirde optimale yakın bir çözüm elde edilmiştir.

Ayrıca, $f(x_1,x_2,...,x_{j^*}+1,...,x_n)$ gerçek optimum için bir üst sınır değeri verir. Optimala daha yakın bir değer, Adım 2 de küçük bir değişiklik yaparak elde edilebilir. Maksimum oranı bulma kuralı şu şekilde tanımlanabilir; $r_{j^*} = \max\left\{ r_j : \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + a_j \le b \right\}$.

4. GENEL KAYNAK TAHSİSİ PROBLEMLERİ

Verilen bir bütçe seviyesini, belirlenen bir ağırlığı, belirlenen bir hacmi, vesaire aşmadan, güvenilirliği maksimum kılacak şekilde her $j=1,2,...,n$ için bütün elemanların sayısının bulunması isteniyor. Şimdiki problemde bir grup kısıt (2) vardır ve tamsayılar üstüne kurulu böyle bir problemi çözmekte sonsuz güçlükler yaratır. Pratik bir yaklaşımla, yeni bileşik bir kısıt aşağıda görüldüğü gibi elde edilebilir.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij}\right)x_j \le \sum_{i=1}^{m}\mu_i b_i \qquad (9)$$

Bu yeni kısıttaki μ_i değerleri, $\sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1$ ve her $i=1,2,...,m$ için $\mu_i \ge 0$. Bu değerler, esasen eşlenik değişkenlerdir (dual variables) ve kısıt grubu (2) doğrusal kısıtlar oldukları için, eşlenik problemi çözerek elde edilebilirler. Bu değiskenlerin Kuhn-Tucker şartlarını kullanarak nasıl hesaplanabileceği, örneğin Luenberger (1973) de anlatılmıştır. Genel problem için, Adım 1'deki oran aşağıdaki gibi (10) hesaplanacaktır.

$$r_j = \frac{\log\left(\dfrac{1-q_j^{x_j+2}}{1-q_j^{x_j+1}}\right)}{\sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij}} \qquad (10)$$

5. BİR ÖRNEK

Tek kısıtlı problemimiz, örnek uygulama olarak kullanılacaktır. Bu örnek problemimizde beş tane eleman bulunmaktadır. Bütçe Seviyeside diyelim ki 25000 YTL olsun. Gerekli bilgiler (a_j YTL cinsindendir) tabloda verilmiştir. Bu değerler tesadüfi seçilmiştir.

j	1	2	3	4	5
p_j	.75	.63	.81	.77	.72
a_j	2725	1535	2500	2015	1805

Marjinal analiz metodu X=(2,3,2,2,3) çözümünü türetir. Güvenilirlik ise R(2,3,2,2,3)=.94180 veya f(2,3,2,2,3)= -0.05996, ayrıca toplam maliyet de 24485 YTL'dir. Her adımda türetilen ara çözümler Tablo1'de verilmiştir. Bütün geçerli çözümleri deneyerek de aynı sonuç elde edilmiştir. Bu sadece bir tesadüftür. Ayrıca, optimal değer için bir üst sınırda elde edilmiştir; X=(2,4,2,2,3), ve R(2,4,2,2,3)=.95137, maliyeti de 26020 YTL'dir.

Tablo 1. Marjinal Analiz Çözümü

İterasyon	Oran Vektörü ($\times 10^{-5}$)	Çözüm (X)	R (X)
0	(8.19,20.51,6.96,10.27,13.71)	(0,0,0,0,0)	.21218
1	(8.19,6.20,6.96,10.27,13.71)	(0,1,0,0,0)	.29069
2	(8.19,6.20,6.96,10.27,3.30)	(0,1,0,0,1)	.37208
3	(8.19,6.20,6.96,2.09,3.30)	(0,1,0,1,1)	.45766
4	(1.79,6.20,6.96,2.09,3.30)	(1,1,0,1,1)	.57208
5	(1.79,6.20,1.20,2.09,3.30)	(1,1,1,1,1)	.68077
6	(1.79,2.15,1.20,2.09,3.30)	(1,2,1,1,1)	.74880
7	(1.79,2.15,1.20,2.09,0.89)	(1,2,1,1,2)	.79467
8	(1.79,0.78,1.20,2.09,0.89)	(1,3,1,1,2)	.82138
9	(1.79,0.78,1.20,0.47,0.89)	(1,3,1,2,2)	.85670
10	(0.43,0.78,1.20,0.47,0.89)	(2,3,1,2,2)	.89958
11	(0.43,0.78,0.22,0.47,0.89)	(2,3,2,2,2)	.92682
12	(0.43,0.78,0.22,0.47,0.25)	(2,3,2,2,3)	.94180

6. SONUÇLAR

Gerçek hayatta sık karşılanılan bir problem, hızlı ve seri bir şekilde marjinal analiz kullanarak çozülmüştür. Esasen bazı aksiyomlar yaparak veya yaklaşım teknikleri kullanarak (Pages and Gondran (1986)), optimal çözümü bulmak mümkündür. Burada anlatılan metot herhangi bir aksiyom veya yaklaşım tekniği kullanmamıştır.

Küçük örneğimizin incelenmesi, marjinal analiz metodunun çalışması, hızı, türettiği çözümlerin kalitesi hakkında bir bilgi vermektedir. Daha geniş kapsamlı bilgi Yüceer (1999) tarafından verilmiştir. Pratisyenler açısından, her $j=1,2,\ldots,n$ için r_j oranı, birim başına güvenilirlik oranının katkısı olarak düşünülebilir. Bilhassa, pratikte bu oranın anlamı ve kullanılması oldukça değerlidir.

KAYNAKLAR

FOX, B. (1966), *Discrete Optimization via Marginal Analysis*, Management Science, 13, 210-216.

IBARAKI, T., KATOH, N. (1988), *Resource Allocation Problems*, The MIT Press.

KAO, E. (1976), *On Incremental Analysis in Resource Allocations, OR Quarterly*, 27, 759-763.

KATOH, N., IBARAKI, T. (1998), *Resource Allocation Problems*, D.--Z. Du, P.M. Pardalos, eds., Handbook of Combinatorial Optimization, Kluwer Academic, Boston, 159-260.

LUENBERGER, D.G. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley.

MILLER, B.L. (1971), *On Minimizing Nonseparable Functions Defined on Integers with an Inventory Application, SIAM Journal of Applied Mathematics*, 21/1, 166-185.

MUROTA, K. (2003), *Discrete Convex Analysis*, SIAM.

PAGES, A., GONDRAN, M. (1986), *System Reliability*, Springer-Verlag.

YÜCEER, Ü. (1999), *Marginal Allocation Algorithm for Nonseparable Functions, INFOR*, 37, 97-113.

YÜCEER, Ü. (2002), *Discrete Convexity: Convexity for Functions Defined on Discrete Spaces,* Discrete Applied Mathematics, 119/3, 299-306.

YÜCEER, Ü. (2006), *The Equivalence of Discrete Convexity and the Classical Definition of Convexity,* International Mathematical Forum, 1/5, 299-308.

REDUNDANCY OPTIMIZATION VIA MARGINAL ANALYSIS

ABSTRACT

An application of marginal analysis to redundancy optimization is presented. The objective function is transformed into a separable function and its discrete concavity is proved. Consequently, the marginal allocation algorithm obtains near optimal solutions very rapidly. An example illustrates the method.

Key Words: *Discrete Concavity, Marginal Allocation Algorithm, Resource Allocation Problems.*