Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2019. Том 26, № 2

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, Д. Балеану, К. Таш

Аннотация. Исследуются вопросы приближенной управляемости за фиксированное и за свободное время класса распределенных систем управления, динамика которых описывается линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка в рефлексивных банаховых пространствах. Предполагается, что оператор при дробной производной Римана — Лиувилля имеет нетривиальное ядро, т. е. уравнение является вырожденным, а пара операторов в уравнении порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего однородного уравнения. Начальное состояние системы управления задается условиями типа Шоуолтера — Сидорова. Для получения критерия приближенной управляемости система редуцирована к совокупности двух подсистем, одна из которых имеет тривиальный вид, а другая разрешена относительно дробной производной. Доказана эквивалентность приближенной управляемости системы и приближенной управляемости двух упомянутых подсистем. Найден критерий приближенной управляемости системы в терминах задающих ее операторов. Общие результаты использованы для получения критерия приближенной управляемости распределенной системы управления, динамика которой описывается линеаризованной квазистационарной системой уравнений фазового поля дробного порядка по времени, а также вырожденных систем рассматриваемого класса с конечномерным входом.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31511

Ключевые слова: приближенная управляемость, вырожденное эволюционное уравнение, дробная производная Римана — Лиувилля, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов.

1. Введение

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{U}$ — банахово пространство, $L : D_L \to \mathscr{Y}$, $M : D_M \to \mathscr{Y}$ — линейные замкнутые операторы, плотно определенные в пространстве $\mathscr{X}$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^α — производная Римана — Лиувилля, $B \in C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y}))$, $u \in C([0,T];\mathscr{U})$ — функция

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19–41–450001, поддержке Правительства РФ (акт 211, контракт 02.A03.21.0011), а также при поддержке Минобрнауки России (госзадание 1.6462.2017/БЧ).

управления, $f \in C([0,T];\mathscr{Y})$. Рассмотрим распределенную систему управления, динамика которой описывается уравнением

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in (0,T]. \tag{1}$$

Уравнение (1) предполагается вырожденным, т. е. $\ker L \neq \{0\}$, при этом пара операторов (L, M) порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего однородного уравнения (1).

Ранее в работе [1] были исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} Lx(0) = y_k \in \mathscr{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1) и был получен вид решения задачи (1), (2). Условия (2) используются в настоящей работе при определении приближенной управляемости для задания начального состояния системы. Рассматриваются вопросы приближенной управляемости за фиксированное и за свободное время. Для получения критерия приближенной управляемости система (1) редуцирована к совокупности двух подсистем, одна из которых, заданная на ядре $\ker L$ оператора L, имеет тривиальный вид, а другая является разрешенной относительно дробной производной. Доказана эквивалентность приближенной управляемости системы (1) и приближенной управляемости двух ее упомянутых подсистем. Получен критерий приближенной управляемости системы (1) в терминах операторов из этого уравнения. Общие результаты использованы для получения критерия приближенной управляемости распределенной системы управления, динамика которой описывается линеаризованной квазистационарной системой уравнений фазового поля дробного порядка по времени, а также класса вырожденных систем вида (1) с конечномерным входом, когда $\mathscr{U} = \mathbb{R}^n$.

Обзор результатов об управляемости систем вида (1) при $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, $L = I$, $\alpha = 1$ можно найти в [2, 3], случай дробного α исследовался в работах [4, 5] и др. Для различных классов вырожденных ($\ker L \neq \{0\}$) систем вида (1) порядка $\alpha = 1$ управляемость и приближенная управляемость исследовалась в [6–12]. В [13–15] изучаются вопросы приближенной управляемости системы (1) дробного порядка α с производной Герасимова — Капуто при условии (L, p)-ограниченности оператора M, которое является более ограничительным условием на операторы L, M, чем в данной работе.

2. Разрешимость уравнения

Для исследования приближенной управляемости системы дробного порядка сформулируем теоремы о разрешимости описывающего такие системы уравнения. Результаты этого параграфа ранее были получены в работах [1, 16–18].

2.1. Уравнение, разрешенное относительно производной. Во-первых, рассмотрим уравнение, разрешенное относительно дробной производной.

Обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ при $t > 0$, $\beta > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := (g_\beta * h)(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)\, ds.$$

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^α — производная Римана — Лиувилля, т. е. $D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, где D_t^m — обычная производная порядка m.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathscr{Z}$ в $\mathscr{Z}$, $\mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определенных в $\mathscr{Z}$ операторов, действующих в $\mathscr{Z}$. Через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, снабженную нормой его графика.

Будем говорить, что оператор A *принадлежит классу* $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\alpha > 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, если оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})\}$;

(ii) для всех $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $K = K(\theta, a) > 0$, что при любом $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 1. Как известно, при $\alpha \in (0, 2)$ оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), если и только если существует аналитическое в секторе $\Sigma_{\theta_0} := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$ экспоненциально ограниченное разрешающее семейство операторов линейного однородного уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$ (см. теорему 2.14 в [19]).

Замечание 2. По теореме Соломяка — Иосиды оператор A принадлежит классу $\mathscr{A}_1(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда порождает аналитическую в секторе Σ_{θ_0} полугруппу операторов [20, 21]. При этом оператор A называется *секториальным.*

Лемма 1 [16]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\Gamma = \partial S_{a,\theta}$ при некоторых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда при каждом $\beta \in \mathbb{R}$ семейство операторов*

$$\left\{ Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1-\beta} (\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t > 0 \right\}$$

допускает аналитическое продолжение в сектор Σ_{θ_0}.

Можно показать, что если оператор A ограничен в пространстве $\mathscr{Z}$, то $Z_\beta(t) = t^\beta E_{\alpha,\beta+1}(t^\alpha A)$, где $E_{\alpha,\beta+1}$ — функция Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

для неоднородного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{4}$$

где $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $T > 0$, $f \in C([0,T];\mathscr{Z})$. *Решением задачи* (3), (4) называется такая функция $z \in C((0,T];D_A)$, для которой

$$g_{m-\alpha} * z \in C^{m-1}([0,T];\mathscr{Z}) \cap C^m((0,T];\mathscr{Z})$$

и выполняются равенства (3) и (4) при всех $t \in (0,T]$.

Здесь и далее $D_t^\beta z(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D_t^\beta z(t)$ в $\mathscr{Z}$.

Теорема 1 [1]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([0,T];D_A)$. Тогда при любых $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, существует единственное решение задачи* (3), (4). *При этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{\alpha-m+k}(t) z_k + \int_0^t Z_{\alpha-1}(t-s) f(s)\, ds.$$

Замечание 3. Аналогичный результат для уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто при $f \in C^\gamma([0,T];\mathscr{Z})$, $\gamma \in (0,1]$, получен в работе [22], а при $f \in C([0,T];D_A)$ — в [18].

2.2. Вырожденное эволюционное уравнение. Сформулируем результаты об однозначной разрешимости вырожденного линейного эволюционного уравнения, которое описывает динамику исследуемой распределенной системы дробного порядка.

Здесь и далее $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, $\mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определенных в $\mathscr{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathscr{Y}$. В предположении, что $L, M \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, множество точек $\mu \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mu L - M : D_L \cap D_M \to \mathscr{Y}$ инъективен и при этом $(\mu L - M)^{-1} L \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $L(\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y})$, называется *$L$-резольвентным множеством $\rho^L(M)$ оператора M*. Введем обозначения $R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1} L$, $L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1}$.

Определение 1. Пусть $\alpha > 0$, $L, M \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) *принадлежит классу $\mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$*, если

(i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

(ii) при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая константа $K = K(\theta, a) > 0$, что для любого $\lambda \in S_{\theta,a}$

$$\max\bigl\{\bigl\|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\bigr\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}, \bigl\|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\bigr\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y})}\bigr\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 4. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y};\mathscr{X})$, то $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ в том и только в том случае, когда $L^{-1} M \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Введем обозначения $\ker L = \ker R_\mu^L(M) := \mathscr{X}^0$, $\ker L_\mu^L(M) := \mathscr{Y}^0$. Через $\mathscr{X}^1$ ($\mathscr{Y}^1$) обозначим замыкание образа $\operatorname{im} R_\mu^L(M)$ ($\operatorname{im} L_\mu^L(M)$) в норме пространства $\mathscr{X}$ ($\mathscr{Y}$). Через L_k (M_k) будет обозначаться сужение оператора L (M) на $D_{L_k} := D_L \cap \mathscr{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathscr{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 2 [16, 17]. *Пусть* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. *Тогда*

(i) $\mathscr{X} = \mathscr{X}^0 \oplus \mathscr{X}^1$, $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}^0 \oplus \mathscr{Y}^1$;

(ii) *проектор* P (Q) *на подпространство* $\mathscr{X}^1$ $(\mathscr{Y}^1)$ *вдоль* $\mathscr{X}^0$ $(\mathscr{Y}^0)$ *имеет вид* $P = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nR_n^L(M)$ $(Q = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} nL_n^L(M))$;

(iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}^0; \mathscr{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$;

(iv) *существуют операторы* $L_1^{-1} \in \mathscr{C}l(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^0; \mathscr{X}^0)$;

(v) $\forall x \in D_L$ $Px \in D_L$ *и* $LPx = QLx$;

(vi) $\forall x \in D_M$ $Px \in D_M$ *и* $MPx = QMx$;

(vii) *если* $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \to \mathscr{X}^1$, *то* $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1 x \in \mathrm{im} L_1\}$ *плотно в* $\mathscr{X}$;

(viii) *если* $V := M_1 L_1^{-1} : D_V \to \mathscr{Y}^1$, *то* $D_V := \{y \in \mathrm{im} L_1 : L_1^{-1} y \in D_{M_1}\}$ *плотно в* $\mathscr{Y}$;

(ix) *если* $L_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$, *то* $S \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(x) *если* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, *то* $V \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;

(xi) *семейства операторов*

$$\left\{X_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1-\beta} R_{\mu^\alpha}^L(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{X}) : t > 0\right\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

$$\left\{Y_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{\alpha-1-\beta} L_{\mu^\alpha}^L(M) e^{\mu t}\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}) : t > 0\right\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

аналитически продолжимы в сектор Σ_{θ_0}. *При всех* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ *существует такое* $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, *что для кадого* $t \in \Sigma_\theta$

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}, \|Y_\beta(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y})}\} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\mathrm{Re} t}(|t|^{-1} + a)^{-\beta}, \quad \beta \le 0, \tag{5}$$

$$\max\{\|X_\beta(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}, \|Y_\beta(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y})}\} \le C_\beta(\theta, a) e^{a\,\mathrm{Re}\, t}|t|^\beta, \quad \beta > 0. \tag{6}$$

Рассмотрим вырожденное ($\ker L \ne \{0\}$) неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{7}$$

с заданным $f \in C([0, T]; \mathscr{Y})$. Его *решением* называется такая функция $x \in C((0, T]; D_M)$, что $g_{m-\alpha} * Lx \in C^m((0, T]; \mathscr{Y})$ и при всех $t \in (0, T]$ выполняется равенство (7). *Решением задачи типа Шоуолтера — Сидорова*

$$D_t^{\alpha-m+k} Lx(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) называется такое решение x этого уравнения, что $g_{m-\alpha} * Lx \in C^{m-1}([0, T]; \mathscr{X})$ и выполняются начальные условия (8).

Замечание 5. Условия (8) являются естественными для слабо вырожденных уравнений, когда подпространство вырождения $\mathscr{X}^0$ совпадает с ядром $\ker L$ оператора L при производной.

Теорема 3 [1]. *Пусть* $\alpha > 0$, $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$ *или* $M_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$, $f : [0, T] \to \mathscr{Y}^0 \dot{+} \mathrm{im} L$, $f \in C([0, T]; \mathscr{Y})$, *при этом* $L_1^{-1} Q f \in C([0, T]; D_{L_1^{-1} M_1})$, $y_k \in L[D_{L_1^{-1} M_1}]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} X_{\alpha-m+k}(t) L_1^{-1} y_k + \int_0^t X_{\alpha-1}(t-s) L_1^{-1} Q f(s)\, ds - M_0^{-1}(I - Q) f(t). \quad (9)$$

Теорема 4 [1]. *Пусть* $\alpha > 0$, $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, $f \in C([0, T]; \mathscr{Y})$, $Qf \in C([0, T]; D_{M_1 L_1^{-1}})$, $y_k \in L[D_L \cap D_M]$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7), (8), *при этом оно имеет вид* (9).

Теоремы 3 и 4 сразу следуют из теоремы 3.4 или 3.5 в [1] соответственно, если заметить, что для уравнения (7) при рассматриваемых в данном параграфе условиях задача (8) эквивалентна задаче

$$D_t^{\alpha-m+k} P x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $y_k = L x_k$.

Замечание 6. Как показано в [1], задача типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} x(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для уравнения (7) является переопределенной, поэтому при исследовании вопросов приближенной управляемости мы не будем использовать условия типа Коши для задания начального состояния вырожденной системы (7).

Замечание 7. Исследование приближенной управляемости вырожденных систем будет проводится в этой работе на основе теоремы 4, так как ее условия на функцию f и начальные данные y_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, вообще говоря, менее ограничительны, чем в теореме 3.

3. Приближенная управляемость подсистем

.

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{U}$ — банахово пространство, $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Обозначим через $C_Q([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$ линейное пространство всех оператор-функций $B \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$, для которых $QB \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; D_V))$, где оператор V определен в теореме 2(viii). Аналогично $C_Q([0, T]; \mathscr{Y})$ — множество всех $g \in C([0, T]; \mathscr{Y})$, для которых $Qg \in C([0, T]; D_V)$.

Далее всегда предполагается, что $B \in C_Q([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$, а также $g \in C_Q([0, T]; \mathscr{Y})$. Функции управления $u(\cdot)$ для системы, описываемой задачей типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} L x(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad (10)$$

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + g(t), \tag{11}$$

будут выбираться из пространства $C([0,T];\mathscr{U})$, поэтому будем иметь $QBu \in C([0,T];D_V)$. По теореме 2 задача (10), (11) может быть редуцирована к начальной задаче

$$D_t^{\alpha-m+k}y(0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{12}$$

для системы уравнений

$$D_t^\alpha y(t) = Vy(t) + QB(t)u(t) + Qg(t), \tag{13}$$

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)(B(t)u(t) + g(t)) \tag{14}$$

на подпространствах $\mathscr{Y}^1$ и $\mathscr{X}^0$ соответственно. Здесь $V = M_1L_1^{-1} \in \mathscr{C}l(\mathscr{Y}^1)$, $y(t) = L_1Px(t)$, $x^0(t) = (I-P)x(t)$. При этом решение задачи (12), (13) по теореме 1 имеет вид

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_{\alpha-m+k}(t)y_k + \int_0^t Y_{\alpha-1}(t-s)Q(B(s)u(s) + g(s))\,ds. \tag{15}$$

Обозначим через $x(T;\bar{y};u)$ значение в момент времени T решения задачи (10), (11) с начальными данными $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ в (10) и с функцией управления u в правой части уравнения (11). Через $y(T;\bar{y};u)$ будем обозначать значение в момент T решения подсистемы, описываемой соотношениями (12), (13). Наконец, через $x^0(T;u)$ обозначим значение при $t = T$ функции (14).

Система (11) называется *приближенно управляемой за время* $T > 0$, если для всех $\varepsilon > 0$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \in (L[D_L \cap D_M])^m$ в (10), $\hat{x} \in \mathscr{X}$ найдется такое $u \in C([0,T];\mathscr{U})$, что $\|x(T;\bar{y};u) - \hat{x}\|_{\mathscr{X}} \le \varepsilon$.

Система (13) называется *приближенно управляемой за время* $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{y} \in \mathscr{Y}^1$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \in (D_V)^m$ в (12) существует такое $u \in C([0,T];\mathscr{U})$, что $\|y(T;\bar{y};u) - \hat{y}\|_{\mathscr{Y}^1} \le \varepsilon$.

Система (14) называется *приближенно управляемой за время* $T > 0$, если при любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x}^0 \in \mathscr{X}^0$ существует такое $u \in C([0,T];\mathscr{U})$, что выполняется неравенство $\|x^0(T;u) - \hat{x}^0\|_{\mathscr{X}^0} \le \varepsilon$.

Следующий результат показывает, что, управляя двумя подсистемами (13) и (14) посредством одной и той же функции $u(\cdot)$, мы, тем не менее, можем привести их траектории в заданные ε-окрестности соответствующих точек $\hat{y} \in \mathscr{Y}^1$, $\hat{x}^0 \in \mathscr{X}^0$ одновременно.

Теорема 5. *Пусть* $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$, *при этом* $B \in C_Q([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y}))$, $g \in C_Q([0,T];\mathscr{Y})$. *Тогда система* (11) *приближенно управляема за время* T, *если и только если подсистемы* (13) *и* (14) *приближенно управляемы за время* T.

Доказательство. Прямое утверждение данной теоремы очевидно, докажем обратное утверждение. Пусть

$$\forall \hat{x}^0 \in \mathscr{X}^0\, \forall \varepsilon > 0\, \exists u^0 \in C([0,T];\mathscr{U})$$
$$\left\| -M_0^{-1}(I-Q)(B(T)u^0(T) + g(T)) - \hat{x}^0 \right\|_{\mathscr{X}} \le \varepsilon/3,$$

$$\forall \bar{y} \in (D_V)^m \, \forall \hat{y} \in \mathscr{Y}^1 \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists u^1 \in C([0,T];\mathscr{U})$$
$$\|y(T;\bar{y};u^1) - \hat{y}\|_{\mathscr{Y}} \le \varepsilon / \big(3\big\|L_1^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)}\big).$$

Выберем новую функцию управления u такую, что $u(t) = u^1(t)$ для $t \in [0,\delta]$ при некотором $\delta \in (T/2, T)$ и $u(t) = u^1(\delta) + \gamma(t-\delta)$ при $t \in (\delta, T]$,

$$\gamma = \frac{u^0(T) - u^1(\delta)}{T-\delta}.$$

Тогда $u \in C([0,T];\mathscr{U})$, $u(T) = u^0(T)$,

$$u(t) = u^1(\delta) + \frac{t-\delta}{T-\delta}\left(u^0(T) - u^1(\delta)\right), \quad t \in (\delta, T].$$

Заметим, что при любом выборе $\delta \in (T/2, T)$

$$\|u(t)\|_{\mathscr{U}} \le C := 2 \max_{t\in[0,T]} \|u^1(t)\|_{\mathscr{U}} + \|u^0(T)\|_{\mathscr{U}}, \quad t \in [0,T],$$

где C не зависит от δ. Возьмем достаточно малое $T - \delta > 0$, $\hat{x} \in \mathscr{X}$, тогда при $\hat{x}^0 = (I-P)\hat{x}$, $\hat{y} = LP\hat{x}$

$$\begin{aligned}\|x(T;\bar{y};u) - \hat{x}\|_{\mathscr{X}} &\le \|x^0(T;u^0) - \hat{x}^0\|_{\mathscr{X}} \\ &+ \big\|L_1^{-1}y(T;\bar{y};u^1) - L_1^{-1}\hat{y}\big\|_{\mathscr{X}} + \big\|L_1^{-1}y(T;\bar{y};u) - L_1^{-1}y(T;\bar{y};u^1)\big\|_{\mathscr{X}} \\ &\le 2\varepsilon/3 + C\big\|L_1^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)} \int\limits_{\delta}^{T} \|Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y})}\,ds \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь мы учитываем неравенства (6) при $\alpha > 1$. Для $\alpha \in (0,1]$ в силу (5) получим также

$$\int\limits_{\delta}^{T} \|Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y})}\,ds \le C_1(1+aT)^{1-\alpha}(T-\delta)^{\alpha} \to 0 \quad \text{при } \delta \to T-. \quad \square$$

Аналогичным образом определяется понятие приближенной управляемости за свободное время. Например, система (11) называется *приближенно управляемой за свободное время*, если для любых $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathscr{X}$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in (L[D_L \cap D_M])^m$ в (10) существуют $T > 0$ и функция управления $u \in C([0,T];\mathscr{U})$ такие, что $\|x(T;\bar{y};u) - \hat{x}\|_{\mathscr{X}} \le \varepsilon$.

Теорема 6. *Пусть $(L,M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$, при этом $B \in C_Q([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y}))$, $g \in C_Q([0,T];\mathscr{Y})$. Тогда система* (11) *приближенно управляема за свободное время, если и только если ее подсистемы* (13) *и* (14) *приближенно управляемы за свободное время.*

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как теорема 5. Докажем достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, $\hat{x} \in \mathscr{X}$, $\bar{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}) \in (L[D_L \cap D_M])^m$ и существуют такие $T_1 > 0$, $u^1 \in C([0,T_1];\mathscr{U})$, при которых

$$\|y(T_1;\bar{y};u^1) - L_1P\hat{x}\|_{\mathscr{Y}^1} \le \varepsilon/\big(3\|L_1^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)}\big),$$

и $T_0 > 0$, $u^0 \in C([0,T_0];\mathscr{U})$, такие, что

$$\|x^0(T_0;u^0) - (I-P)\hat{x}\|_{\mathscr{X}^0} \le \varepsilon/3.$$

Возьмем функцию управления u, как при доказательстве теоремы 5 при $T = T_1$, тогда $\|x(T_1;\bar{y};u) - \hat{x}\|_{\mathscr{Y}^1} \le \varepsilon$. $\square$

4. Критерий приближенной управляемости

Получим критерий приближенной управляемости вырожденной системы управления дробного порядка в терминах операторов из описывающего эту систему уравнения.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, $\mathscr{A}$ — некоторое множество индексов, $\alpha \in \mathscr{A}$, $D_\alpha \subset \mathscr{Z}$. Через $\mathrm{span}\{D_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ обозначим линейную оболочку объединения множеств D_α, $\alpha \in \mathscr{A}$, а через $\overline{\mathrm{span}}\{D_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ — ее замыкание в норме пространства $\mathscr{Z}$. Через $\overline{\mathrm{im}}A$ будем обозначать замыкание образа $\mathrm{im}A$ оператора $A : D_A \to \mathscr{Z}$.

Банаховы пространства $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, как и ранее, предполагаются рефлексивными.

Лемма 2. *Пусть* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$ *или* $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, $QB \in C([0,T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; D_V))$, $Qg \in C\big([0,T]; D_V\big)$. *Тогда система* (13) *приближенно управляема за время* T, *если и только если*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im}\, Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s) : 0 < s < T\} = \mathscr{Y}^1. \qquad (16)$$

Доказательство. Из вида (15) решения задачи типа Коши (12), (13) следует, что достаточно рассмотреть только приближенную управляемость системы (13) из нуля ($\bar{y} = 0$). Пусть система не является приближенно управляемой из нуля. Тогда в силу (15) множество элементов вида

$$\int_0^T Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)u(s)\,ds, \quad u \in C([0,T]; \mathscr{U}),$$

не является плотным в $\mathscr{Y}^1$. По теореме Хана — Банаха в таком случае существует такое $f \in \mathscr{Y}^{1*} \setminus \{0\}$, что

$$f\left(\int_0^T Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)u(s)\,ds\right) = \int_0^T f\left(Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)u(s)\right)\,ds = 0 \qquad (17)$$

при всех $u \in C([0,T]; \mathscr{U})$.

Для каждого v из пространства Лебега — Бохнера $L_p(0,T;\mathscr{U})$, $\max\{1, 1/\alpha\} < p < \infty$, существует такая последовательность $\{u_n\} \subset C([0,T];\mathscr{U})$, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v$ в $L_p(0,T;\mathscr{U})$. Следовательно, используя неравенства (5), (6), получим

$$\left|\int_0^T f(Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)(u_n(s)-v(s)))\,ds\right|$$
$$\leq C\|f\|_{\mathscr{Y}^{1*}} \int_0^T s^{(\alpha-1)p'}\,ds \int_0^T \|u_n(s)-v(s)\|_{\mathscr{U}}^p\,ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Здесь мы учитываем, что из неравенства $p > 1/\alpha$ следует, что $(\alpha - 1)p' + 1 > 0$, где $p' = p/(p-1)$. Поэтому равенство (17) справедливо при всех $u \in L_p(0, T; \mathscr{U})$.

Возьмем $t_0 \in (0, T)$ и малое $\delta > 0$, $u_\delta(t) = w \in \mathscr{U}$ для $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $u_\delta(t) = 0$ при $t \in [0, T] \setminus [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Тогда $u_\delta \in L_p(0, T; \mathscr{U})$ и в силу непрерывности подынтегральной функции

$$0 = \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)w)\, ds = f(Y_{\alpha-1}(T-\xi)QB(\xi)w)$$

при некотором $\xi \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Перейдем к пределу при $\delta \to 0+$ и получим равенство $f\,(Y_{\alpha-1}(T-t_0)QB(t_0)w) = 0$ при всех $t_0 \in (0, T)$, $w \in \mathscr{U}$. Таким образом, условие (16) не выполняется.

Обратное утверждение леммы очевидно в силу интегрального вида решения уравнения (13) с нулевыми начальными данными. $\square$

В терминах § 2 это утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 7. *Пусть $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, при этом $B \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; D_A))$, $g \in C([0, T]; D_A)$. Тогда система $D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t)u(t) + g(t)$ приближенно управляема за время T, если и только если*

$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} Z_{\alpha-1}(T-s)B(s) : 0 < s < T\} = \mathscr{Z}.$$

Замечание 8. Если $QB(t)$ не зависит от t, то приближенная управляемость системы (13) за время T влечет ее приближенную управляемость за любое время $T_1 > T$, так как при этом

$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} Y_{\alpha-1}(s)QB : 0 < s < T\} \subset \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} Y_{\alpha-1}(s)QB : 0 < s < T_1\}.$$

Критерий приближенной управляемости системы (14) очевиден.

Лемма 3. *Пусть $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $(I - Q)B \in C([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$, $(I - Q)g \in C([0, T]; \mathscr{Y})$. Тогда система* (14) *приближенно управляема за время T, если и только если $\overline{\operatorname{im}} M_0^{-1}(I - Q)B(T) = \mathscr{X}^0$.*

Замечание 9. Если $M_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^0; \mathscr{Y}^0)$, то необходимым и достаточным условием приближенной управляемости системы (14) за время T является равенство $\overline{\operatorname{im}}(I - Q)B(T) = M_0[\mathscr{X}^0] = \mathscr{Y}^0$.

Замечание 10. Если $(I - Q)B(t)$ не зависит от t, то приближенная управляемость системы (14) за время T влечет ее приближенную управляемость за любое время $T_1 > 0$.

Теорема 8. *Пусть $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, при этом $B \in C_Q([0, T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$, $g \in C_Q([0, T]; \mathscr{Y})$. Тогда система* (11) *приближенно управляема за время T, если и только если*

$$\overline{\operatorname{im}} M_0^{-1}(I - Q)B(T) = \mathscr{X}^0, \quad \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s) : 0 < s < T\} = \mathscr{Y}^1.$$

Доказательство. Требуемое получаем из теоремы 5 и лемм 2 и 3. $\square$

Замечание 11. Согласно замечаниям 8 и 10 и теореме 5, если $B(t)$ не зависит от t, то приближенная управляемость системы (11) за время T влечет ее приближенную управляемость за любое большее время $T_1 > T$.

Аналогичным образом может быть получен такой же результат о приближенной управляемости за свободное время.

Теорема 9. *Пусть* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, *при этом* $B \in C_Q([0, +\infty); \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$, $g \in C_Q([0, +\infty); \mathscr{Y})$. *Тогда система* (11) *приближенно управляема за свободное время, если и только если*

$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} M_0^{-1}(I - Q)B(T) : T > 0\} = \mathscr{X}^0,$$

$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} Y_{\alpha-1}(T - s)QB(s) : T > 0,\, 0 < s < T\} = \mathscr{Y}^1.$$

5. О приближенной управляемости одной распределенной системы

Рассмотрим систему управления, описываемую начально-краевой задачей

$$D_t^{\alpha-m+k}(v + \nu w)(\xi, 0) = v_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, \dots, m - 1, \tag{18}$$

$$v(\xi, t) = w(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \tag{19}$$

$$D_t^\alpha(v(\xi, t) + \nu w(\xi, t)) = \kappa\Delta v(\xi, t) + b_1(t)u_1(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T], \tag{20}$$

$$\Delta w(\xi, t) + \beta w(\xi, t) + \gamma v(\xi, t) + b_2(t)u_2(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega \times (0, T]. \tag{21}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\kappa > 0$, $\beta, \gamma, \nu \in \mathbb{R}$, $v = v(\xi, t)$, $w = w(\xi, t)$ — неизвестные функции, $u_1 = u_1(\xi, t)$, $u_2 = u_2(\xi, t)$ — функции управления, заданы функции $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$.

Замечание 12. В случае $\alpha = 1$ система уравнений (18)–(21) является линеаризацией квазистационарной системы уравнений фазового поля, описывающей в линейном приближении фазовые переходы первого рода в рамках мезоскопической теории [23, 24].

Обозначим через $A := \Delta : D_A \to L_2(\Omega)$ оператор Лапласа с областью определения $D_A = H_0^2(\Omega) := \{z \in H^2(\Omega) : z(\xi) = 0, \xi \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим собственные значения оператора A, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Ортонормированная система соответствующих собственных функций $\{\varphi_k\}$, как известно, образует базис в $L_2(\Omega)$.

Положим $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = (L_2(\Omega))^2$, $D_M = \left(H_0^2(\Omega)\right)^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & \nu I \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathscr{X}; \mathscr{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \kappa A & \mathbb{O} \\ \gamma I & \beta I + A \end{pmatrix} \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}; \mathscr{Y}). \tag{22}$$

Лемма 4 [17]. *Пусть* $\alpha \in (0,2)$, $\kappa > 0$, $\beta, \gamma, \nu \in \mathbb{R}$, $\gamma\nu - \beta \notin \sigma(A)$, *операторы* L *и* M *определены формулами* (22). *Тогда* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(a_0, \theta_0)$ *при некоторых* $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, *а проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} (\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} & \nu(\beta+\Delta)(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \\ -\gamma(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} & -\gamma\nu(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} I & \kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Замечание 13. Из вида проекторов P, Q следует, что при $\gamma \neq 0$

$$\mathscr{X}^0 = \ker P = \big\{(z_1, z_2) \in (L_2(\Omega))^2 : z_1 + \nu z_2 \equiv 0\big\},$$

$$\mathscr{X}^1 = \mathrm{im} P = \{(-\gamma^{-1}(\beta+\Delta)z, z) : z \in H_0^2(\Omega)\},$$

$$\mathscr{Y}^0 = \ker Q = \{(-\kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+A)^{-1}z, z) : z \in L_2(\Omega)\},$$

$$\mathscr{Y}^1 = \mathrm{im} Q = L_2(\Omega) \times \{0\}.$$

При $\gamma = 0$ будет $\mathscr{X}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\}$.

Замечание 14. При $\gamma \neq 0$, очевидно, $L_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$, $M_1 \notin \mathscr{L}(\mathscr{X}^1; \mathscr{Y}^1)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, поскольку ему соответствует непрерывный оператор $-\gamma(\beta - \gamma\nu + A)^{-1}$. Только при $0 \notin \sigma(A)$, $-\beta \notin \sigma(A)$ существует $M_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$ и ему соответствует оператор $-\kappa^{-1}\gamma A^{-1}(\beta + A)^{-1}$. При $\gamma = 0$ отличие в том, что $L_1^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, а $M_1^{-1} = \kappa^{-1}A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, если $0 \notin \sigma(A)$.

Согласно данному выше определению приближенной управляемости системы общего вида (11) система (19)–(21) является приближенно управляемой за время $T > 0$, если для любых $\varepsilon > 0$, $v_0, v_1, \dots, v_{m-1} \in H_0^2(\Omega)$, $\hat{v}, \hat{w} \in L_2(\Omega)$ найдутся такие $u_1, u_2 \in C([0,T]; L_2(\Omega))$, что

$$\|v(\cdot,T) - \hat{v}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|w(\cdot,T) - \widehat{w}\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon^2.$$

При этом мы учли тот факт, что $L[D_L \cap D_M] = L[D_M] = H_0^2(\Omega) \times \{0\}$.

Теорема 10. *Пусть* $\kappa > 0$, $\beta, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma\nu - \beta \notin \sigma(A)$, $b_1, b_2 \in C([0,T]; \mathbb{R})$. *Тогда система* (19)–(21) *приближенно управляема за время* $T > 0$, *если и только если* $b_2(T) \neq 0$. *Система* (19)–(21) *приближенно управляема за свободное время, если и только если* $b_2 \not\equiv 0$ *на* $[0, +\infty)$.

Доказательство. Из вида оператора L следует, что условия (18) в точности имеют вид (10). Согласно замечанию 14 $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$.

Выберем $\mathscr{U} := (H_0^2(\Omega))^2$,

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t)J & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b_2(t)J \end{pmatrix},$$

где J — оператор вложения $H_0^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, тогда $B \in C([0,T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Y}))$,

$$QB(t) = \begin{pmatrix} b_1(t)J & b_2(t)\kappa\nu\Delta(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in C([0,T]; \mathscr{L}(\mathscr{U}; D_V)),$$

так как оператор-функция

$$VQB(t)u = \begin{pmatrix} b_1(t)\kappa\Delta(\beta+\Delta)D^{-1} & -b_2(t)\kappa\gamma\nu D^{-1}\Delta D^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

где $D = \beta - \gamma\nu + A$, лежит в $C([0,T];\mathscr{L}(\mathscr{U};\mathscr{Y}))$.

Заметим также, что образ

$$\operatorname{im} M_0^{-1}(I-Q)B(T) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -b_2(T)\nu(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \\ \mathbb{O} & b_2(T)(\beta-\gamma\nu+A)^{-1} \end{pmatrix}$$

при $b_2(T) \neq 0$ плотен в $\mathscr{Y}^0$ в силу плотности $(\beta-\gamma\nu+A)^{-1}[H_0^2(\Omega)] = D_{A^2}$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Поэтому вырожденная подсистема в данном случае приближенно управляема за время T, если и только если $b_2(T) \neq 0$, и приближенно управляема за свободное время в том и только в том случае, когда $b_2 \not\equiv 0$ на $[0,+\infty)$.

С учетом формулы Ганкеля [25] имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\mu t}}{\mu^\alpha-\delta_k}\,d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t\Gamma}\frac{t^{\alpha-1}e^{\lambda}d\lambda}{\lambda^\alpha - t^\alpha\delta_k}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^{\alpha(n+1)-1}\delta_k^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{t\Gamma} e^{\lambda}\lambda^{-\alpha(n+1)}d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha(n+1)-1}\delta_k^n}{\Gamma(\alpha(n+1))} = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\delta_k t^\alpha),$$

где

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$$

— функция Миттаг-Леффлера. В [17] при доказательстве леммы 3 показано, что

$$L_{\mu^\alpha}^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^\alpha-\delta_k} & \frac{\kappa\nu\lambda_k}{(\beta-\gamma\nu+\lambda_k)(\mu^\alpha-\delta_k)} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

поэтому

$$Y_{\alpha-1}(T-s)QB(s)$$
$$= (T-s)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix} b_1(s)a_k(T-s)J & b_2(s)a_k(T-s)\kappa\nu\Delta D^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где $a_k(t) = E_{\alpha,\alpha}(\delta_k t^\alpha)$. Таким образом, подсистема (13) приближенно управляема за время T, если и только если при каждом $k \in \mathbb{N}$ существует такое $s_k \in (0,T)$, что $b_i(s_k)E_{\alpha,\alpha}\left(\delta_k(T-s_k)^\alpha\right) \neq 0$ при $i=1$ или $i=2$. Так как $E_{\alpha,\alpha}$ — целая функция и имеет только изолированные нули, а функции b_1, b_2 непрерывны, это условие эквивалентно тому, что $|b_1|+|b_2| \not\equiv 0$ на $[0,T]$. Это условие выполняется, если $b_2(T) \neq 0$.

Условие приближенной управляемости за свободное время получается очевидным образом. $\square$

Замечание 15. Результат теоремы 10 по сути означает, что, имея возможность воздействовать только на уравнение (21), мы сможем управлять траекториями всей вырожденной системы уравнений (20), (21).

6. Приближенная управляемость систем с конечномерным входом

Пусть заданы $b_i \in \mathscr{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим систему управления

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i(t) + g(t), \tag{23}$$

где $u_i : [0, T] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Она является частным случаем системы (11) при $\mathscr{U} = \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $Bu(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_i(t)$. Системы управления такого вида называются *системами с конечномерным входом.* Функция управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ будет выбираться из пространства $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$. Теоремы 8 и 9 влекут следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $(L, M) \in \mathscr{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1; \mathscr{X}^1)$, $b_i \in \mathscr{Y}$, $Qb_i \in D_V$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $g \in C_Q([0, T]; \mathscr{Y})$. *Тогда*

(i) *система* (23) *приближенно управляема за время T, если и только если справедливы равенства*

$$\operatorname{span}\{(I - Q)b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathscr{Y}^0,$$

$$\overline{\operatorname{span}}\{Y_{\alpha-1}(s)Qb_i,\ 0 < s < T,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathscr{Y}^1;$$

(ii) *система* (23) *приближенно управляема за свободное время, если и только если*

$$\operatorname{span}\{(I - Q)b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathscr{Y}^0,$$

$$\overline{\operatorname{span}}\{Y_{\alpha-1}(s)Qb_i,\ s > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathscr{Y}^1.$$

Доказательство. Очевидно, что $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathscr{Y})$, а из условия $Qb_i \in D_V$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $QB \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; D_V)$.

По теореме 8 условие

$$\mathscr{X}^0 = \overline{\operatorname{im}} M_0^{-1}(I - Q)B = \overline{\operatorname{span}}\big\{M_0^{-1}(I - Q)b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\big\}$$

является необходимым и достаточным для приближенной управляемости подсистемы на подпространстве $\mathscr{X}^0$. Это множество имеет конечную размерность, а оператор M_0 плотно определен, поэтому

$$\mathscr{X}^0 = \operatorname{span}\big\{M_0^{-1}(I - Q)b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\big\} = D_{M_0},$$

$$\mathscr{Y}^0 = M[D_{M_0}] = \operatorname{span}\{(I - Q)b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Остальное следует из теорем 8 и 9 очевидным образом. $\square$

Замечание 16. Из доказательства следствия 1 видно, что если система (23) приближенно управляема за время $T > 0$ или за свободное время, то размерность пространств $\mathscr{X}^0$ и $\mathscr{Y}^0$ не больше n.

Замечание 17. В условиях следствия 1 из приближенной управляемости системы (23) следует, что $M_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^0; \mathscr{Y}^0)$, так как $D_{M_0} = \mathscr{X}^0$ и оператор M_0 замкнут.

Замечание 18. Система с n-мерным входом

$$v(\xi,t)=w(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T],$$

$$D_t^\alpha(v(\xi,t)+\nu w(\xi,t))=\kappa\Delta v(\xi,t)+\sum_{i=1}^n b_{i1}u_{i1}(t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],$$

$$\Delta w(\xi,t)+\beta w(\xi,t)+\gamma v(\xi,t)+\sum_{i=1}^n b_{i2}u_{i2}(t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],$$

при любом $n\in\mathbb{N}$ не является приближенно управляемой ни за фиксированное, ни за свободное время, так как для нее подпространство $\mathscr{X}^0$ бесконечномерно (см. замечание 13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.
2. *Curtain R. F.* The Salamon–Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey // IMA J. Math. Control Inform. 1997. V. 14, N 2. P. 207–223.
3. *Шолохович Ф. А.* Об управляемости линейных дианмических систем // Изв. УрГУ. 1998. № 10, вып. 1. С. 103–126.
4. *Debbouche A., Baleanu D.* Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delayintegro-differential systems // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62, N 3. P. 1442–1450.
5. *Chalishajar D. N., Malar K., Karthikeyan K.* Approximate controllability of abstract impulsive fractional neutral evolution equations with infinite delay in Banach spaces // Electron. J. Differ. Equ. 2013. V. 2013, N 275. P. 1–21.
6. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами // Изв. вузов. Математика. 2002. № 7. С. 54–57.
7. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1137–1139.
8. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах // Мат. заметки. 2003. Т. 74, вып. 4. С. 618–628.
9. *Рузакова О. А., Федоров В. Е.* Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах // Вычислит. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 90–102.
10. *Федоров В. Е., Шкляр Б.* Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 12. С. 137–156.
11. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Оптимальное управление вырожденными распределенными системами. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2013.
12. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Об управляемости вырожденных распределенных систем // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 78–98.
13. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Baybulatova G. D.* Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907. P. 020009-1–020009-14.
14. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Туров М. М.* Бесконечномерная и конечномерная ε-управляемость одного класса вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. журн. 2018. Т. 3, № 1. С. 5–26.
15. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M.* Approximate controllability of strongly degenerate fractional order system of distributed control // IFAC-PapersOnLine. 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018 (Yekaterinburg, Russia, Oct. 15–19, 2018). 2018. V. 51, N 32. P. 675–680.

16. *Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А.* Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.
17. *Романова Е. А., Федоров В. Е.* Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 58–72.
18. *Федоров В. Е., Романова Е. А.* Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзоры. 2018. Т. 149. С. 103–112.
19. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces: Thes. ... Doct. Phil. Eindhoven: Eindhoven Univ. Tech., Univ. Press Facilities, 2001.
20. *Solomyak M. Z.* Applications of the theory of semigroups to the study of differential equations in Banach spaces // Dokl. Math. 1958. V. 122, N 5. P. 766–769.
21. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
22. *Fedorov V. E.* A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces // Integral equations and their applications. Proc. University Network Seminar on the occasion of the 3rd Mongolia–Russia–Vietnam Workshop on NSIDE 2018 (Hanoi Math. Soc.). Hung Yen: Hung Yen Univ. Tech. Edu., 2018. P. 11–20.
23. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
24. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.
25. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 19 мая 2019 г.
После доработки 31 мая 2019 г.
Принята к публикации 3 июня 2019 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
лаборатория функциональных материалов,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
kar@csu.ru

Гордиевских Дмитрий Михайлович
Шадринский государственный педагогический университет,
кафедра физико-математического и информационно-технологического образования,
ул. Карла Либкнехта, 3, Шадринск, Курганская область 641870
dm_gordiev@mail.ru

Балеану Думитру
Университет Чанкайа,
отделение математики и компьютерных наук,
TR-06530, Анкара, Турция;
Институт космических наук,
R-077125 Бухарест, Румыния
dumitru.baleanu@gmail.com

Таш Кенан
Университет Чанкайа,
отделение математики и компьютерных наук,
TR-06530, Анкара, Турция
kenantas@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2019. Том 26, № 2

UDC 517.95

CRITERION OF THE APPROXIMATE CONTROLLABILITY OF A CLASS OF DEGENERATE DISTRIBUTED SYSTEMS WITH THE RIEMANN—LIOUVILLE DERIVATIVE

V. E. Fedorov, D. M. Gordievskikh, D. Baleanu, and K. Taş

Abstract. The issues of approximate controllability in fixed time and in free time of a class of distributed control systems whose dynamics are described by linear differential equations of fractional order in reflexive Banach spaces are investigated. It is assumed that the operator at the fractional Riemann–Liouville derivative has a non-trivial kernel, i. e., the equation is degenerate, and the pair of operators in the equation generates an analytic in a sector resolving family of operators of the corresponding homogeneous equation. The initial state of the control system is set by the Showalter–Sidorov type conditions. To obtain a criterion for the approximate controllability, the system is reduced to a set of two subsystems, one of which has a trivial form and the another is solved with respect to the fractional derivative. The equivalence of the approximate controllability of the system and of the approximate controllability of its two mentioned subsystems is proved. A criterion of the approximate controllability of the system is obtained in terms of the operators from the equation. The general results are used to find a criterion for the approximate controllability for a distributed control system, whose dynamics is described by the linearized quasistationary system of the phase field equations of a fractional order in time, as well as degenerate systems of the class under consideration with finite-dimensional input.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31511

Keywords: approximate controllability, degenerate evolution equation, fractional Riemann–Liouville derivative, analytic in a sector resolving family of operators.

REFERENCES

1. *Fedorov V. E. and Avilovich A. S.*, "A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case," Sib. Math. J, **60**, No. 2, 359–372 (2019).
2. *Curtain R. F.*, "The Salamon–Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey," IMA J. Math. Control Inform., **14**, No. 2, 207–223 (1997).
3. *Sholokhovich F. A.*, "On controllability of linear dynamical systems [in Russian]," Izv. Uralsk. Gos. Univ., **10**, No. 1, 103–126 (1998).

The study was funded by the Russian Foundation for Basic Reasearch (project No. 19–41–450001), by Act No. 211 of the Government of the Russian Federation (contract 02.A03.21.0011), and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (task No. 1.6462.2017/BCh).

4. *Debbouche A. and Baleanu D.*, "Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems," Comput. Math. Appl., **62**, No. 3, 1442–1450 (2011).

5. *Chalishajar D. N., Malar K., and Karthikeyan K.*, "Approximate controllability of abstract impulsive fractional neutral evolution equations with infinite delay in Banach spaces," Electron. J. Differ. Equ., **2013**, No. 275, 1–21 (2013).

6. *Fedorov V. E. and Ruzakova O. A.*, "Controllability of linear Sobolev type equations with relatively p-radial operators," Russ. Math., **46**, No. 7, 54–57 (2002).

7. *Fedorov V. E. and Ruzakova O. A.*, "One-dimensional controllability of Sobolev linear equations in Hilbert spaces," Differ. Equ., **38**, iss. 8, 1216–1218 (2002).

8. *Fedorov V. E. and Ruzakova O. A.*, "Controllability in dimensions of one and two of Sobolev-type equations in Banach spaces," Math. Notes, **74**, No. 4, 583–592 (2003).

9. *Ruzakova O. A. and Fedorov V. E.*, "On ε-controllability of linear equations, not solved with respect to the derivative, in Banach spaces [in Russian]," Vychisl. Tekhnol., **10**, No. 5, 90–102 (2005).

10. *Fedorov V. E. and Shklyar B.*, "Exact null controllability of degenerate evolution equations with scalar control," Sb. Math., **203**, No. 12, 1817–1836 (2012).

11. *Plekhanova M. V. and Fedorov V. E.*, Optimal Control for Degenerate Distributed Systems, Chelyabinsk: Izdat. Tsentr Yuzhno-Uralsk. Gos. Univ., 2013. (In Russian).

12. *Plekhanova M. V. and Fedorov V. E.*, "On controllability of degenerate distributed systems [in Russian]," Ufa. Math. J., **6**, No. 2, 77–96 (2014).

13. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Baybulatova G. D.*, "Controllability of a class of weakly degenerate fractional order evolution equations," in: AIP Conf. Proc., **1907**, 020009-1–020009-14 (2017).

14. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Turov M. M.*, "Infinite-dimensional and finite-dimensional ε-controllability for a class of fractional order degenerate evolution equations [in Russian]," Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **3**, No. 1, 5–26 (2018).

15. *Fedorov V. E. and Gordievskikh D. M.*, "Approximate controllability of strongly degenerate fractional order system of distributed control," in: IFAC-PapersOnLine, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO 2018, Yekaterinburg, Russia, Oct. 15–19, 2018), **51**, No. 32, 675–680 (2018).

16. *Fedorov V. E., Romanova E. A., and Debbouche A.*, "Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations," J. Math. Sci., **228**, No. 4, 380–394 (2018).

17. *Romanova E. A. and Fedorov V. E.*, "Resolving operators of linear degenerate evolution equation with the Caputo derivative. The sectorial case [in Russian]," Math. Zamet. SVFU, **23**, No. 4, 58–72 (2016).

18. *Fedorov V. E. and Romanova E. A.*, "Inhomogeneous evolution equations of fractional order in the sectorial case [in Russian]," Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obzory, **149**, 103–112 (2018).

19. *Bajlekova E. G.*, Fractional Evolution Equations in Banach Spaces: PhD Thes., Eindhoven Univ. Technology, Univ. Press Facilities, Eindhoven (2001).

20. *Solomyak M. Z.*, "Applications of the theory of semigroups to the study of differential equations in Banach spaces," Dokl. Math., **122**, No. 5, 766–769 (1958).

21. *Yosida K.*, Functional Analysis, Springer-Verl., Berlin (1965).

22. *Fedorov V. E.*, "A class of fractional order semilinear evolutions in Banach spaces," in: Integral Equations and Their Applications, Proc. Univ. Network Seminar on the occasion of the 3rd Mongolia–Russia–Vietnam Workshop (NSIDE 2018, Hanoi Math. Soc.), pp. 11–20, Hung Yen Univ. Tech. Edu., Hung Yen (2018).

23. *Plotnikov P. I. and Starovoitov V. N.*, "The Stefan problem with surface tension as the limit of a phase field model," Differ. Equ., **29**, No. 3, 395–404 (1993).

24. *Plotnikov P. I. and Klepacheva A. V.*, "The phase field equations and gradient flows of marginal functions," **42**, No. 3, 651–669 (2001).

25. *Bateman H. and Erdelýi A.*, Higher Transcendental Functions, V. 3, McGraw-Hill Book Co., New York (1953).

Submitted May 19, 2019
Revised May 31,
Accepted June 3, 2019

Vladimir E. Fedorov
Mathematical Analysis Department,
Chelyabinsk State University,
129 Kashirin Brothers Street, Chelyabinsk, Russia 454001;
Functional Materials Laboratory,
South Ural State University (National Research University),
76 Lenin Avenue, Chelyabinsk, Russia 454080
kar@csu.ru

Dmitriy M. Gordievskikh
Shadrinsk State Pedagogical University,
3 Karl Liebknecht Street, Shadrinsk, Russia 641870
dm_gordiev@mail.ru

Dumitru Baleanu
Department of Mathematics and Computer Sciences,
Faculty of Arts and Sciences,
Çankaya University,
Çukurambar Mah. Öğretmenler Cad. No: 14, 06530 Çankaya, Ankara, Turkey;
Institute of Space Science,
R-077125 Măgurle-Bucharest, Romania
dumitru.baleanu@gmail.com

Kenan Taş
Department of Mathematics and Computer Sciences,
Faculty of Arts and Sciences,
Çankaya University,
Çukurambar Mah. Öğretmenler Cad. No: 14, 06530 Çankaya, Ankara, Turkey
kenantas@gmail.com